PART4　3 次方程式の解と係数

例題

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2)　3 次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が 1 と 3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2)　3 次方程式 $x^3+ax^2+13x+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

第 4 講　PART4 確認問題

1　3次方程式 $x^3+ax^2+2x+b=0$ が2と -4 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

$a=$ [ア]，$b=$ [イウエ]

他の解 [オカ]

2　3次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

$a=$ [キ]，$b=$ [クケ]

他の解 [コサ]，[シ]$-$[ス]i

PART4　３次方程式の解と係数

例題

(1) ３次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が -1 と 2 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2) ３次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(1) $x=-1$，2 が解であるから

$$(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-6=0,\quad 2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-6=0$$

すなわち　$a-b=7$，$2a+b=-1$　　　これを解いて　$a=2$，$b=-5$

このとき，与えられた方程式は　$x^3+2x^2-5x-6=0$

左辺を因数分解して　$(x+1)(x-2)(x+3)=0$

したがって，他の解は -3

(2) $x=1+2i$ が解であるから

$$(1+2i)^3-(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

整理すると　$(a+b-8)+(2a-6)i=0$

a，b は実数であるから，$a+b-8$，$2a-6$ も実数である。

よって　$a+b-8=0$，$2a-6=0$　　　これを解いて　$a=3$，$b=5$

このとき，与えられた方程式は　$x^3-x^2+3x+5=0$

左辺を因数分解して　$(x+1)(x^2-2x+5)=0$　　　これを解いて　$x=-1$，$1\pm2i$

したがって，他の解は -1，$1-2i$

練習

(1) 3 次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が 1 と 3 を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(2) 3 次方程式 $x^3+ax^2+13x+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(1) $x=1$，3 が解であるから

$$1^3+a\cdot1^2-21\cdot1+b=0,\ 3^3+a\cdot3^2-21\cdot3+b=0$$

すなわち　$a+b=20$，$9a+b=36$　　これを解いて　$a=2$，$b=18$

このとき，与えられた方程式は　$x^3+2x^2-21x+18=0$

左辺を因数分解して　$(x-1)(x-3)(x+6)=0$

したがって，他の解は -6

(2) $x=2+i$ が解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+13(2+i)+b=0$$

整理して　$(3a+b+28)+(24+4a)i=0$

a，b は実数であるから，$3a+b+28$，$24+4a$ も実数である。

よって，$3a+b+28=0$，$24+4a=0$

これを解いて　$a=-6$，$b=-10$

このとき，与えられた方程式は　$x^3-6x^2+13x-10=0$

左辺を因数分解して　$(x-2)(x^2-4x+5)=0$　　これを解いて　$x=2$，$2\pm i$

したがって，他の解は 2，$2-i$

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：7，イウエ：－40，オカ：－5

[解説]

$x=2$，-4 が解であるから

$$2^3+a\cdot2^2+2\cdot2+b=0 \quad \cdots\cdots①$$ [A]

$$(-4)^3+a\cdot(-4)^2+2\cdot(-4)+b=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$4a+b+12=0,\ 16a+b-72=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{a=7,\ b=-40}$$

このとき，与えられた方程式は

$$x^3+7x^2+2x-40=0$$

この方程式の左辺は $(x-2)(x+4)$ を因数にもつから，因数分解して

$$(x-2)(x+4)(x+5)=0$$

したがって，他の解は **-5**

[A]　$x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき
・$f(\alpha)=0$
・$f(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ
を利用し，係数を決定する。

2 **[正解]** **キ**：8，**クケ**：10，**コサ**：−1，**シ**：1，**ス**：3

[解説]

$x=1+3i$ が解であるから

$$(1+3i)^3-(1+3i)^2+a(1+3i)+b=0$$

整理すると

$$(a+b-18)+(3a-24)i=0$$ [B]

a，b は実数であるから，$a+b-18$，$3a-24$ も実数である。

よって

$$a+b-18=0,\ 3a-24=0$$

これを解いて

$$\boldsymbol{a=8,\ b=10}$$

このとき，与えられた方程式は

$$x^3-x^2+8x+10=0$$

左辺を因数分解して

$$(x+1)(x^2-2x+10)=0$$

これを解いて

$$x=-1,\ 1\pm 3i$$

したがって，他の解は $\boldsymbol{-1,\ 1-3i}$

[B]　$x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき

・$f(\alpha)=0$

・$f(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ

を利用し，係数を決定する。

$x=\alpha$ が虚数解のときは，複素数の相等

　A，B が実数のとき

　$A+Bi=0 \Longleftrightarrow A=B=0$

を利用するとよい。